

2.4.4 Kreslení grafů funkcí metodou dělení definičního oboru I

Předpoklady: 2401, 2208

Pedagogická poznámka: Mnoho let vypadala tato hodina podstatně jinak. Řešily se zde jednodušší grafy, nakreslitelné i napodobením výpočtu. U druhé třídy, kterou jsem měl už od primy, jsem si všiml, že je to strašně neefektivní – žáci řešení pomocí metody dělení definičního oboru spíše jen předstírali a grafy kreslili stejně jako v předchozích hodinách. Proto jsem první hodinu celou změnil a rovnou začínám funkcemi, které napodobením výpočtu řešit nejdou.

Př. 1: Které typy funkcí s absolutní hodnotou můžeme kreslit pomocí metody napodobení výpočtu? Navrhni předpis funkce, kterou touto metodou řešit nepůjde.

U metody napodobení výpočtu jsme vždy začínali nakreslením grafu funkce $y = x$ (případně funkce $y = |x|$). Získali jsme tak výchozí graf, který jsme potom upravovali podle dalších operací, které následovaly v předpisu funkce.

⇒ Metodou napodobení výpočtu můžeme kreslit grafy funkcí, jejichž předpis obsahuje pouze jedno x (toto x představuje výchozí funkce $y = x$).

⇒ Metodou napodobení výpočtu nepůjde nakreslit funkce, jejichž předpis obsahuje vícekrát neznámou x , například funkce $y = |x| + x$.

Připomenutí:

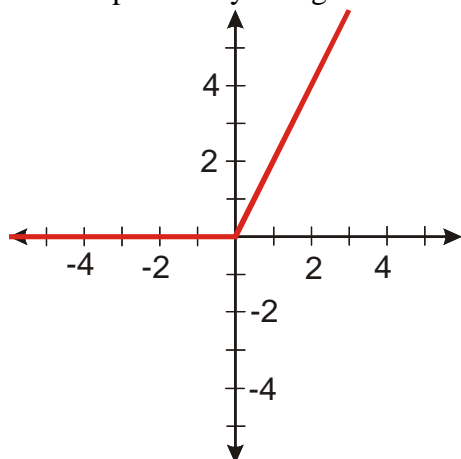
Pokud jsme při řešení nerovnic potřebovali vynásobit nerovnici výrazem, nemohli jsme postupovat pro všechna čísla najednou. Výpočet jsme rozdělili do větší a každou větví řešili zvlášť (= metoda dělení definičního oboru). Podobným způsobem jsme i na začátku kapitoly nakreslili graf funkce $y = |x|$.

Př. 2: Odhadni, jak bude vypadat graf funkce $y = |x| + x$. Svůj odhad potvrď nakreslením grafu, při kterém využiješ, že pro $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, a pro $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ (metoda dělení definičního oboru). Pokud si nevíš rady, připomeň si, jak jsme na začátku kapitoly kreslili graf funkce $y = |x|$.

Odhad:

- Pro kladná čísla se hodnoty funkcí $y = |x|$ a $y = x$ rovnají \Rightarrow funkce $y = |x| + x$ by se měla chovat jako funkce $y = 2x$.
- Pro záporná čísla se dává funkce $y = |x|$ opačnou (kladnou) hodnotu než funkce $y = x$
 \Rightarrow hodnota funkce $y = |x| + x$ by měla být nulová.

⇒ Předpokládaný tvar grafu:

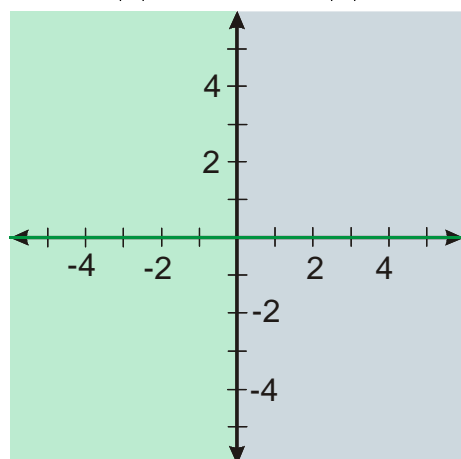


Kreslení grafu:

Při odstraňování záleží, zda je x (vnitřek absolutní hodnoty) kladné nebo záporné.

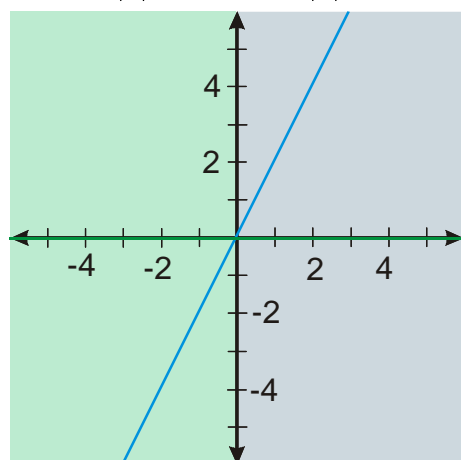
1) $x \in (-\infty; 0)$, část obrázku nalevo od osy y

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = |x| + x = -x + x = 0$$

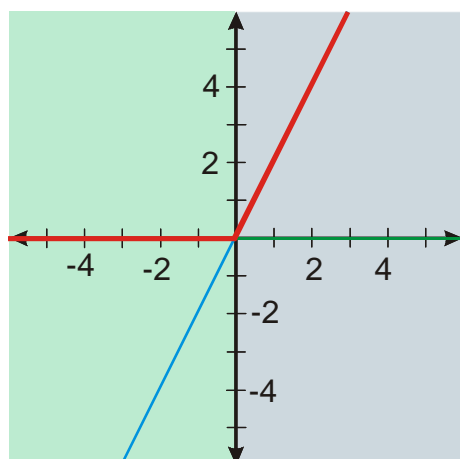


2) $x \in (0; \infty)$, část obrázku napravo od osy y

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = |x| + x = x + x = 2x$$



V levé (zelené) části vytáhneme zelenou a v pravé (modré) modrou čáru. Obě čáry by se měly potkat na ose y .



Pedagogická poznámka: Zatím se mi nepodařilo u této hodiny najít správnou míru mezi samostatným počítáním v lavicích a společným kontrolováním na projektoru. Studenti mají při kreslení značné problémy (související s tím, že nedostatečně chápou nebo nedostatečně dodržují metodu) a hodně jich potřebuje pomoc. Společná kontrola je nutná minimálně po příkladech s pedagogickou poznámkou. Protože zadání příkladů obsahuje pouze předpisy funkcí je možné je přepsat na tabuli a nechávat řešení na projektoru delší dobu.

Pedagogická poznámka: Graf s nevytaženým výsledkem je u všech příkladů nakreslen dvakrát schválně. Jde o to, abych mohl studentům ukázat nakreslené funkce pro jednotlivé intervaly a zároveň ještě neviděl vytažený výsledek.

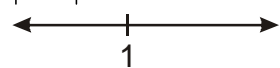
Pedagogická poznámka: Postup s projektorem by měl být uzpůsoben spíše pomalejší části třídy. Přesto je potřeba zároveň kontrolovat (zejména v následující hodině) i ty rychlejší, aby se zbytečně netrápili na některých chytácích a neztráceli zbytečně mnoho času.

Pedagogická poznámka: Při odstraňování chyb v příkladech je třeba se dostat k tomu, aby studenti pochopili, že jejich chyba se (pokud to tak je) skrývá ve špatném dodržení postupu, který jim jinak je zcela jasný.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y = |x-1| + 2x$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x-1|: x-1=0 \Rightarrow x=1$$



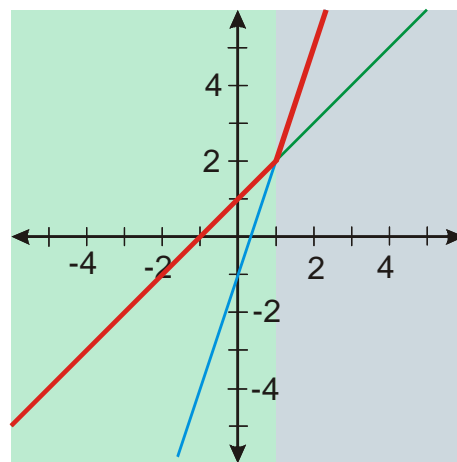
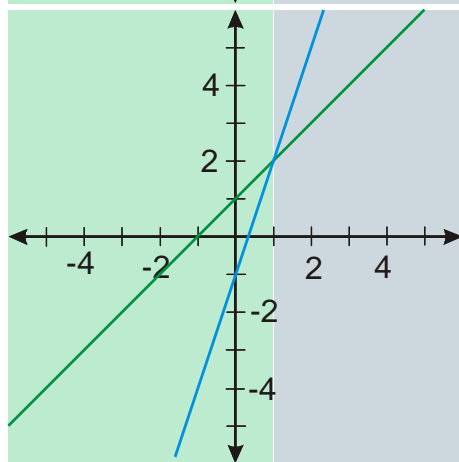
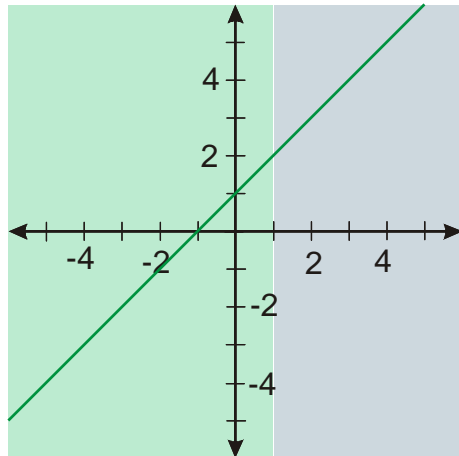
\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 1) \quad x-1 \leq 0 \Rightarrow |x-1| = -x+1$$

$$y = |x-1| + 2x = -x+1+2x = x+1$$

$$2) x \in (1; \infty) \quad x-1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$$

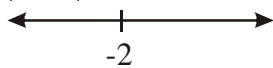
$$y = |x-1| + 2x = x-1+2x = 3x-1$$



Př. 4: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |x+2| - x - 1$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x+2|: x+2=0 \Rightarrow x=-2$$



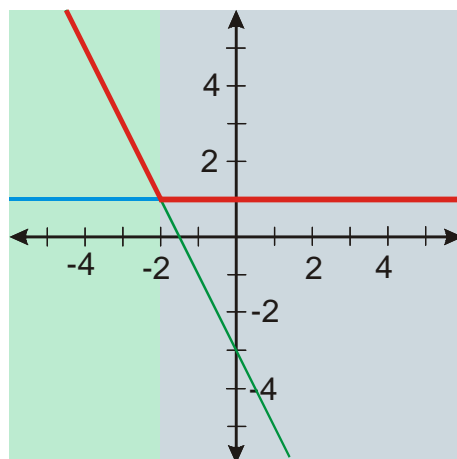
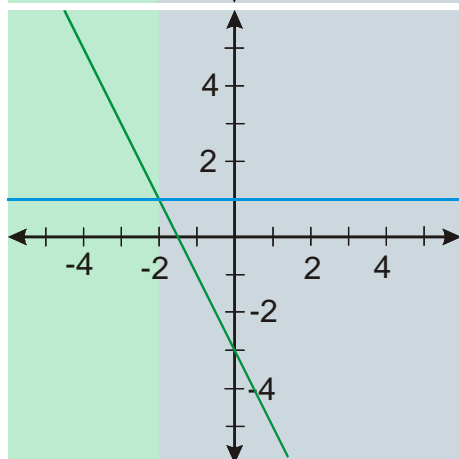
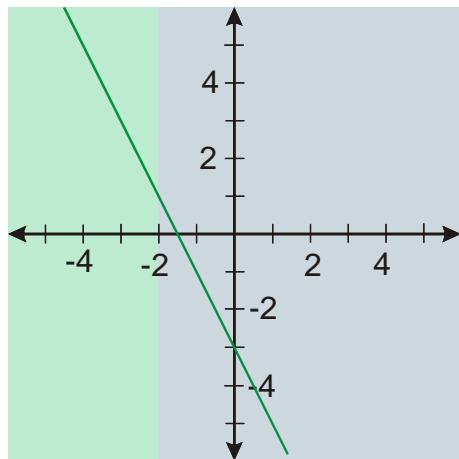
\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; -2) \quad x+2 \leq 0 \Rightarrow |x+2| = -x-2$$

$$y = |x+2| - x - 1 = -x - 2 - x - 1 = -2x - 3$$

$$2) x \in (-2; \infty) \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$$

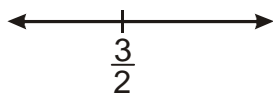
$$y = |x+2| - x - 1 = x + 2 - x - 1 = 1$$



Př. 5: Nakresli graf funkce $y = |3 - 2x| + x - 2$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|3 - 2x|: \quad 3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



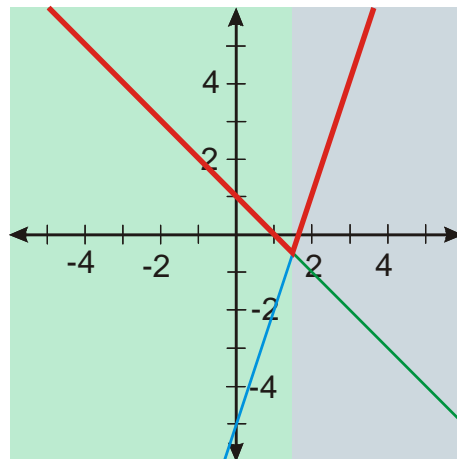
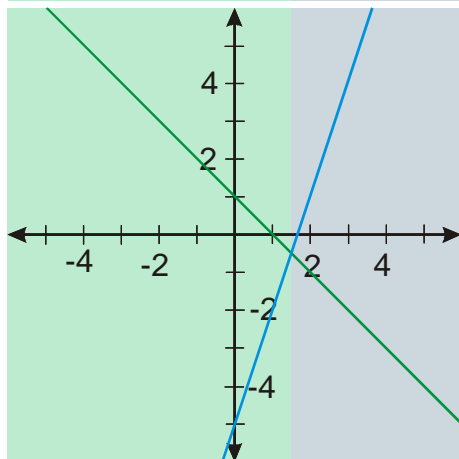
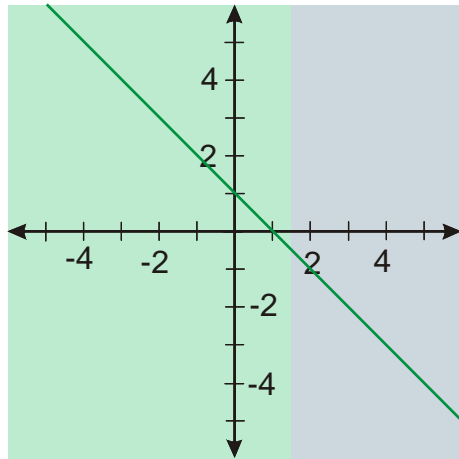
\Rightarrow dva intervaly

$$1) \ x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \quad 3 - 2x \geq 0 \Rightarrow |3 - 2x| = 3 - 2x$$

$$y = |3 - 2x| + x - 2 = 3 - 2x + x - 2 = -x + 1$$

$$2) \ x \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right) \quad 3 - 2x \leq 0 \Rightarrow |3 - 2x| = -3 + 2x$$

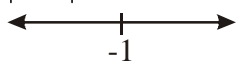
$$y = |3 - 2x| + x - 2 = -3 + 2x + x - 2 = 3x - 5$$



Př. 6: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |x + 1|$.

Absolutní hodnotu můžeme odstranit podle toho, zda je uvnitř kladné nebo záporné číslo \Rightarrow zjistíme, kdy je uvnitř nula (nulový bod) absolutní hodnoty a podle něj rozdělíme definiční obor:

$$|x + 1|: x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; -1)$$

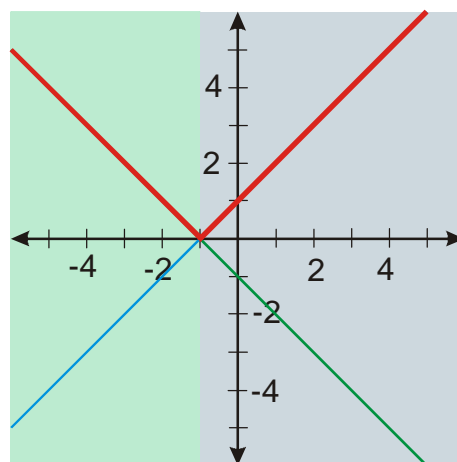
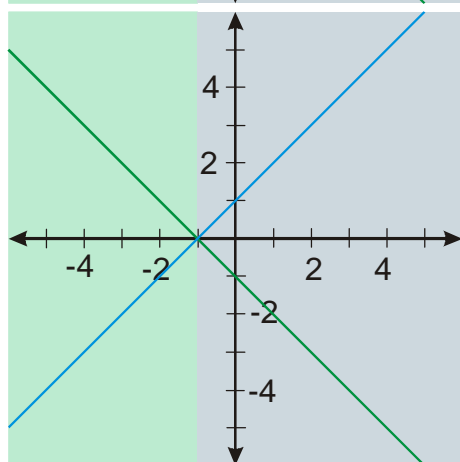
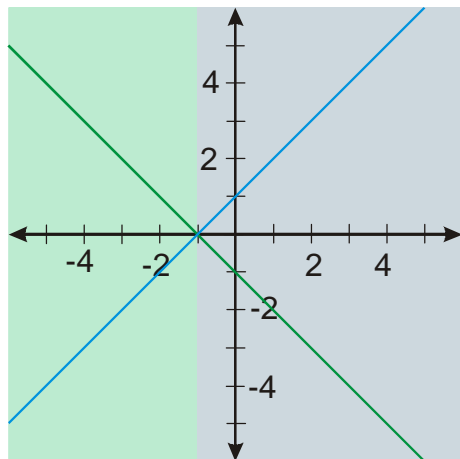
$$x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow |x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$$

$$y = |x + 1| = -x - 1$$

$$2) x \in (-1; \infty)$$

$$x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$$

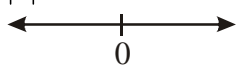
$$y = |x + 1| = x + 1$$



Př. 7: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = -|x| + 1$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x|: \quad x = 0$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) \quad x \in (-\infty; 0)$$

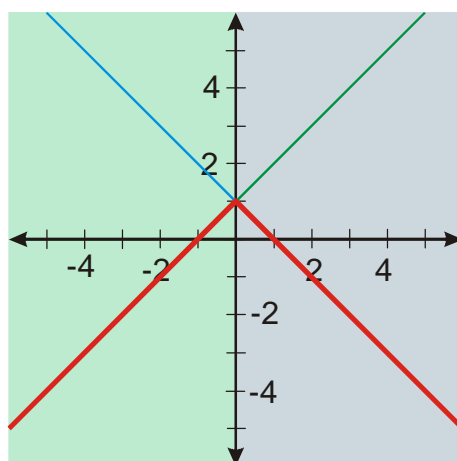
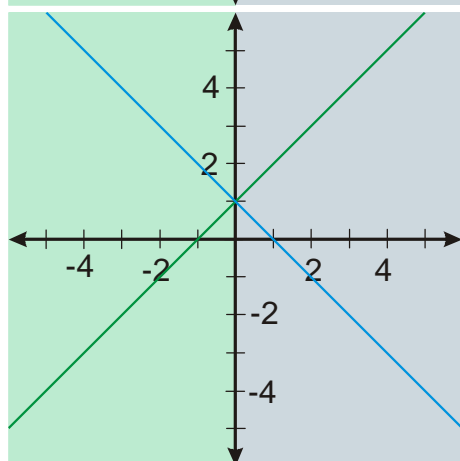
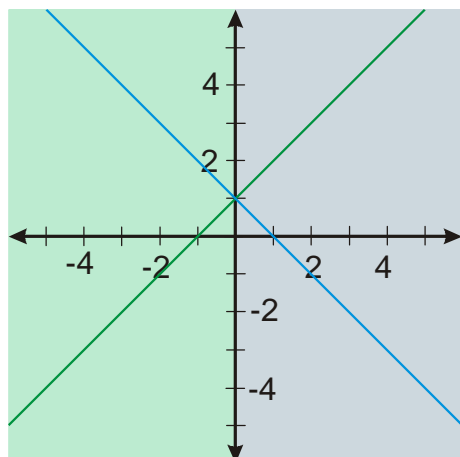
$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$y = -|x| + 1 = -(-x) + 1 = x + 1$$

$$2) \quad x \in (0; \infty)$$

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$y = -|x| + 1 = -x + 1$$

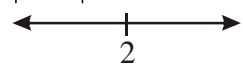


Pedagogická poznámka: Podobně jako u předchozího příkladu jsou problémy s vytažení výsledku, mnohým se nezdá, že by mohl obsahovat tolik záporných čísel. Na tomto příkladě se většinou poprvé pozná zda studenti opravdu chápou, že každému výpočtu patří pouze kus plochy graf a zda umí najít ten správný. Studenty, kteří ztroskotají, protože si nepíšou, kdy která funkce platí, upozorňuji na tento fakt.

Př. 8: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |2 - x| - 1$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|2 - x|: 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 2)$$

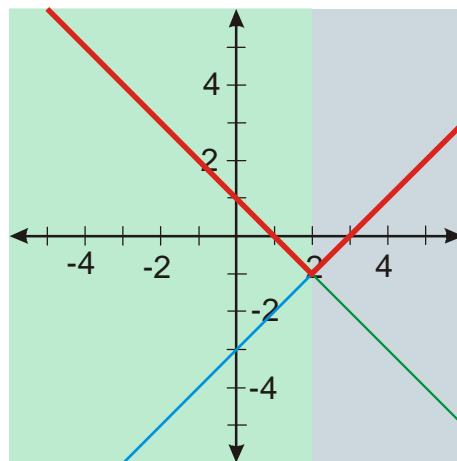
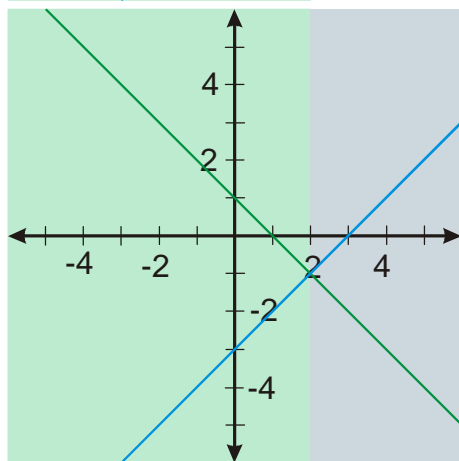
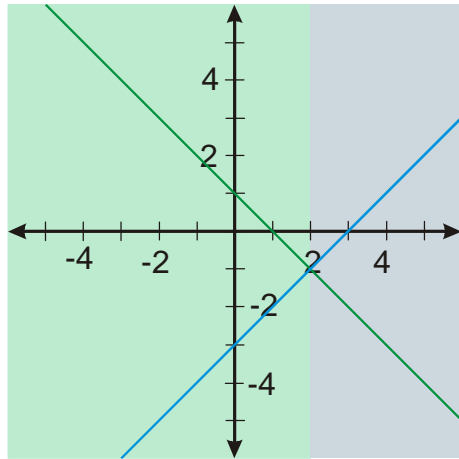
$$2 - x > 0 \Rightarrow |2 - x| = 2 - x$$

$$y = |2 - x| - 1 = 2 - x - 1 = -x + 1$$

$$2) x \in \langle -2; \infty)$$

$$2 - x < 0 \Rightarrow |2 - x| = -(2 - x) = x - 2$$

$$y = |2 - x| - 1 = x - 2 - 1 = x - 3$$



Pedagogická poznámka: Studenti mívají zábrany při sčítání dvojky (pocházející z absolutní hodnoty) a jedničkou.

Pedagogická poznámka: Rychlejší studenti určitě stihnou bez problémů spočítat všechny příklady včetně Petákové, ti horší však budou mít dost práce i s prvními šesti, proto hodina neobsahuje více příkladů.

Př. 9: Petáková:
strana 28/cvičení 40 f_1, h_2, g_1

Shrnutí: Dělení definičního oboru můžeme využít i při kreslení grafů s absolutní hodnotou.